نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **قدرمطلق**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

$$x^{۲} \le |x| \Rightarrow |x|^{۲} - |x| \le ۰ \Rightarrow |x|(|x| - ۱) \le ۰$$

$$\Rightarrow |x| \le ۱$$

$$|x| \le ۱ \Rightarrow \begin{cases} |x| - ۱ \le ۰ \\ x^{۲} \le ۱ \Rightarrow x^{۲} - ۱ \le ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -(x^{۲} - ۱) + (|x| - ۱) = -x^{۲} + ۱ + |x| - ۱$$

$$= -x^{۲} + |x| = \frac{۱}{۴} - (|x| - \frac{۱}{۲})^{۲}$$

حال محدوده‌ی عبارت فوق را می‌یابیم:

$$۰ \le |x| \le ۱ \Rightarrow \frac{-۱}{۲} \le |x| - \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ \le (|x| - \frac{۱}{۲})^{۲} \le \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{-۱}{۴} \le -(|x| - \frac{۱}{۲})^{۲} \le ۰ \Rightarrow ۰ \le \frac{۱}{۴} - (|x| - \frac{۱}{۲})^{۲} \le \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ۰ \le A \le \frac{۱}{۴} \Rightarrow \max(A) = \frac{۱}{۴}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم زمانی معادله‌ی $|a| + |b| = |a - b|$ برقرار است که $ab \le ۰$ باشد.

بنابراین با توجه به این که $\underbrace{(x^{۲} + ۳x + ۵)}_{a} - \underbrace{(۲x + ۹)}_{b} = x^{۲} + x - ۴$ داریم: $(x^{۲} + ۳x + ۵)(۲x + ۹) \le ۰$

عبارت $x^{۲} + ۳x + ۵$ همواره مثبت است $(\Delta < ۰, a > ۰)$، بنابراین:

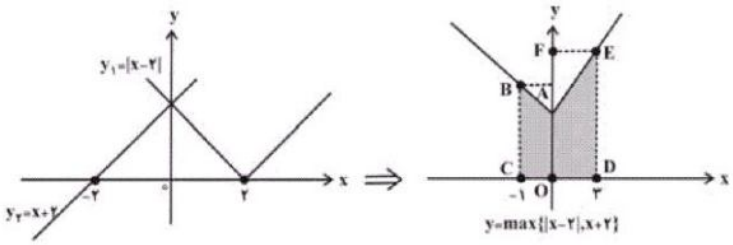
$$۲x + ۹ \le ۰ \Rightarrow x \le \frac{-۹}{۲}$$

پس اعداد صحیح ۱-، ۲-، ۳- و ۴- را شامل نمی‌شود.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۴

اگر $y_1 = |x - ۲|$ و $y_۲ = x + ۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم:

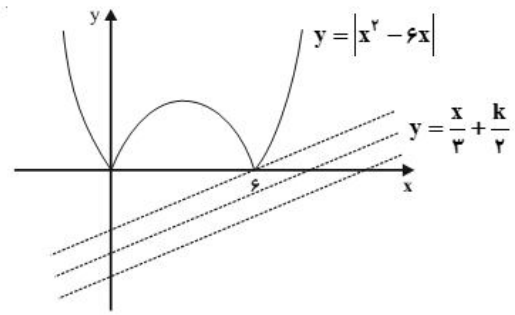


S_{ODEA}ذوزنقه S_{OABC}+ ذوزنقه= مساحت قسمت هاشور زده⇐

$= \frac{(۲+۳)(۱)}{۲} + \frac{(۲+۵)۳}{۲} = \frac{۵}{۲} + \frac{۲۱}{۲} = ۱۳$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳



نامعادله‌ی $|x^۲ - ۶x| \geq \frac{x}{۳} + \frac{k}{۲}$ وقتی جوابش اعداد حقیقی است که خط $y = \frac{x}{۳} + \frac{k}{۲}$ از نقطه‌ی (۶,۰) بگذرد یا هر خط دیگر موازی آن که زیر خط مذکور قرار گیرد. بنابراین حداکثر مقدار k وقتی است که خط از نقطه‌ی (۶,۰) بگذرد.

$۰ = \frac{۶}{۳} + \frac{k}{۲} \Rightarrow \frac{k}{۲} = -۲ \Rightarrow k = -۴$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $|a-b| \le |a|+|b|$ و حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که $ab < 0$ باشد. پس داریم:

$$|x^2 - x| + x^2 = |x| \Rightarrow |x^2 - x| + |x^2| = |x|$$

از طرفی معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Rightarrow \left|\underbrace{x^2 - x}_{b}\right| + \left|\underbrace{x^2}_{a}\right| = \left|\underbrace{x^2}_{a} - \underbrace{(x^2 - x)}_{b}\right|$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - x) < 0$$

$$\xrightarrow{x^2 \ge 0} x(x-1) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow \left|x - \frac{1+0}{2}\right| < \frac{1-0}{2}$$

با توجه به $|x-\alpha| < \beta$ داریم:

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha.\beta = \frac{1}{4}$$

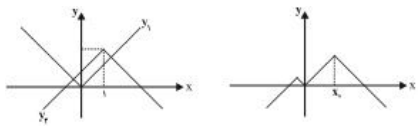
سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

به مفهوم $Min\{a,b\}$ توجه کنید:

$$Min\{a,b\} = \begin{cases} b & , \quad a \ge b \\ a & , \quad a < b \end{cases}$$

این موضوع را می‌توانیم برای دو تابع نیز تعمیم دهیم، برای رسم $f(x) = Min\{|x|, 2-|x-1|\}$، ابتدا هر کدام از دو تابع $y_1 = |x|$ و $y_2 = 2 - |x-1|$ را رسم کرده و سپس با توجه به تعریف Min، در فاصله‌ای که y_1 پایین‌تر یا مساوی y_2 است، نمودار y_1 و در هر بازه‌ای که y_1 بالاتر یا مساوی y_2 است، نمودار y_2 را رسم می‌کنیم، لذا:



با توجه به نمودار دیده می‌شود که ماکزیمم تابع در بازه‌ی $x>1$، در نقطه‌ای به طول x_0 اتفاق می‌افتد، لذا محل تلاقی دو تابع را به‌ازای $x>1$ می‌یابیم:

$$|x| = 2 - |x-1| \xrightarrow{x>1} x = 2 - x + 1 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

بنابراین ماکزیمم f برابر است با:

$$Max f = f\left(\frac{3}{2}\right) = Min\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2}$$

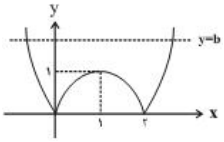
سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

با فرض $a \neq 0$ نمودار $y = |x^2 - ax|$ به‌صورت می‌باشد و با توجه به اینکه $x = 1$ محور تقارن تابع فوق است و معادله‌ی محور تقارن تابع فوق از رابطه‌ی $x = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$ به‌دست می‌آید، پس: $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

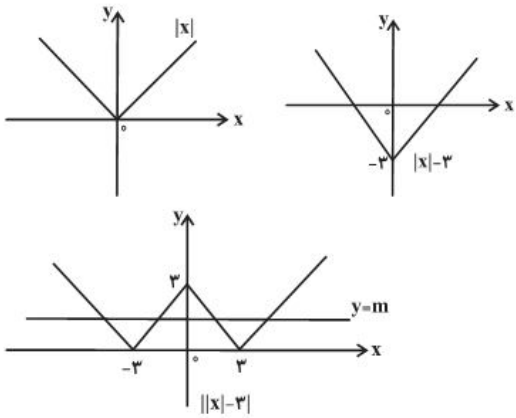
حال نمودار $y = |x^2 - 2x|$ و خط $y = b$ را طوری رسم می‌کنیم که همدیگر را فقط در دو نقطه قطع کنند.



با توجه به شکل داریم: $b > 1$، لذا $a + b > 3$ می‌باشد.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به شکل اگر خط $y = m$ نمودار f را در ۴ نقطه قطع کند می‌بایست $0 < m < 3$ باشد، بنابراین در محدوده تغییرات m فقط ۲ عدد طبیعی ۱ و ۲ قرار دارد.

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

$$|u| = a \Rightarrow \begin{cases} u = a \\ u = -a \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{x^2+1}{2x-1}\right| = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{2x-1} = x + 1 \\ \frac{x^2+1}{2x-1} = -x - 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{x^2+1}{2x-1} = x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{x^2+1}{2x-1} = -x - 1 \Rightarrow x^2 + 1 = -2x^2 - x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

اما $x = -2$ قابل‌قبول نیست چون اگر در معادله‌ی اصلی قرار دهیم سمت راست تساوی منفی می‌شود و این امکان‌پذیر نیست، بنابراین:

$\frac{2}{3} = (\frac{-1}{3}) + 0 + 1 =$ مجموع $\Rightarrow \{-\frac{1}{3}, 0, 1\} =$ مجموعه جواب

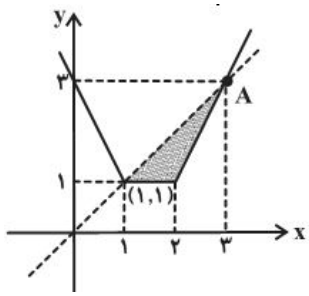
سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

تابع f را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x-۲| + |x-۱| = \begin{cases} -۲x+۳ & ; \quad x < ۱ \\ ۱ & ; \quad ۱ \le x \le ۲ \\ ۲x-۳ & ; \quad ۲ < x \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x)$ و خط $y = x$ را رسم می‌کنیم. مختصات نقطه‌ی تقاطع دو نمودار را پیدا می‌کنیم:



$$۲x_A - ۳ = x_A$$

$$\Rightarrow x_A = ۳ \ , \ y_A = ۳$$

مساحت مثلث : $S = \frac{۱\times۲}{۲} = ۱$